ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES — ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE
ECOLE CENTRALE DE LYON — ECOLE SUPERIEURE D'OPTIQUE

Concours d'admission 1982

****

MATHEMATIQUES I

(2 pages dactylographiées)

P'

NOTATIONS

Le symbole E désigne la fonction "partie entière". $\mathbb{N}^*$ est l'ensemble des entiers strictement positifs ; n désigne un élément de $\mathbb{N}^*$.

On pose : $\omega = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. On remarquera que : $\omega^2 = \omega + 1$ et $\frac{1}{\omega} = \omega - 1$

On considère la suite, dite de Fibonacci, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$a_1 = 1 \; ; \; a_2 = 2 \; ; \; a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ pour tout } n \geqslant 3.$$

PARTIE 1

1.1.a) Vérifier : $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$

b) Pour tout $n \geqslant 2$, calculer $a_n^2 - a_{n-1} \cdot a_{n+1}$.

c) Trouver la nature de la série de terme général :

$$u_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} - \frac{a_n}{a_{n-1}} \quad , \; n \geqslant 2.$$

d) Pour tout $n \geqslant 2$, vérifier : $\omega = \frac{a_{n+1}\,\omega + a_n}{a_n\,\omega + a_{n-1}}$.

e) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, vérifier :

$$\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} < \omega < \frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} \quad \text{et} \quad 0 < \omega - \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} < \frac{1}{a_{2n}\,a_{2n-1}}$$

Trouver la nature et la limite éventuelle de la suite $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

1.2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

a) Vérifier : $E(a_{2n}\,\omega) = a_{2n+1}$.

b) Calculer : $E(a_{2n-1}\,\omega)$ et $E(a_{2n-1}\,\omega^2)$.

PARTIE 2

On note B l'ensemble des couples $(E(n\,\omega^2), E(n\,\omega))$ quand n parcourt $\mathbb{N}^*$:

$$B = \{(E(n\,\omega^2), E(n\,\omega)) \mid n \in \mathbb{N}^*\}$$

2.1. Montrer : $B = \{(p,q) \in \mathbb{N}^{*2} \mid q = E((p-q)\,\omega)\}$.

2.2. Montrer : $B = \{(p,q) \in \mathbb{N}^{*2} \mid 0 < p - q\,\omega < \frac{1}{\omega}\}$. (Ce résultat sera utile pour la suite).

2.3. On note I l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2, à coefficients entiers strictement positifs, vérifiant la condition :

(i) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, à coefficients dans $\mathbb{N}^*$, est un élément de I si, et seulement si, pour tout $(p,q) \in B$, le couple (P,Q) défini par : $\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ est aussi un élément de B .

a) Calculer $\lim_{n \to +\infty} \frac{E(n\,\omega^2)}{E(n\,\omega)}$.

Montrer que si $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ est un élément de I, alors : $\omega = \frac{a\,\omega + b}{c\,\omega + d}$ et $c = b = a - d$

b) Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^{*2}$. A tout $(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}$ on fait correspondre $(P,Q) \in \mathbb{N}^2$ par :

$$\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a-b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

Exprimer $\frac{P - Q\,\omega}{a - b\,\omega}$ en fonction de p, q, ω .

En déduire que si $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a-b \end{bmatrix}$ appartient à I, alors : $0 < a - b\omega < 1$.

(On pourra introduire $S = \sup_{(p,q) \in B} (p - q\omega)$, ou utiliser toute autre méthode).

c) Montrer que, réciproquement, toute matrice de la forme : $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a-b \end{bmatrix}$ avec $(a,b) \in \mathbb{N}^{*2}$ et $0 < a - b\omega < 1$, est un élément de I.

Montrer que l'on est dans ce cas, en particulier, si $(a,b) \in B$.

PARTIE 3

M désigne la matrice $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, qui appartient à I car $0 < 2 - \omega < 1$

3.1. On cherche à caractériser les $(P,Q) \in B$ tels que le couple (p,q) défini par :

$$\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \qquad (1) \qquad \text{soit élément de B.}$$

a) Montrer si l'on a (1) avec $(p,q) \in B$, alors : $0 < P - Q\omega < \frac{1}{2\omega + 1}$

b) Montrer que si $(P,Q) \in B$ vérifie $0 < P - Q\omega < \frac{1}{2\omega + 1}$, alors (p,q) défini par (1) est élément de B.

3.2. A tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on associe $\varphi(x,y) = x^2 - xy - y^2$.
Dans la question 3.2, on étudie l'ensemble :

$$C = \{(p,q) \in B \mid \varphi(p,q) = 1\}$$

a) Pour quels $n \in \mathbb{N}^*$ a-t-on $(a_{n+1}, a_n) \in C$?

b) Soit (p,q) un élément de C. Montrer : $0 < p - q\omega < \frac{1}{\sqrt{5}\, q}$ (entre autres méthodes, on pourra appliquer la formule des accroissements finis à la fonction $f : x \mapsto x^2 - x - 1$ entre ω et $\frac{p}{q}$).

En déduire que : $0 < p - q\omega < \frac{1}{2\omega + 1}$, sauf pour une valeur de q que l'on précisera.

Montrer que tout élément de C est de la forme (a_{2n}, a_{2n-1}), avec $n \in \mathbb{N}^*$.

3.3. On note : $\Phi = \{\varphi(p,q) \mid (p,q) \in B\}$

a) Soient a un élément de Φ et (p,q) un élément de B tels que $\varphi(p,q) = a$ et que :

$$(\forall (p',q') \in B) \quad (\varphi(p',q') = a) \Longrightarrow (q' \geqslant q)$$

Montrer successivement : $p - q\omega > \frac{1}{2\omega + 1}$ et $\frac{a}{q^2} > (\frac{p}{q} - \omega)\sqrt{5}$

En déduire : $q < (1 + \frac{2}{\sqrt{5}})\, a$.

b) Se servir de ce qui précède pour trouver la liste des éléments de Φ compris, au sens large, entre 1 et 10.

PARTIE 4

On pose : $A' = \{E(p\omega) \mid p \in \mathbb{N}^*\}$, $A'' = \{E(q\omega^2) \mid q \in \mathbb{N}^*\}$

On veut montrer que (A', A'') est une partition de $\mathbb{N}^*$.

4.1. On fait l'hypothèse : $\exists (p,q) \in \mathbb{N}^{*2}$, $E(p\omega) = E(q\omega^2)$
En déduire : $p = E(q\omega)$ ou $p = E(q\omega) + 1$.
Montrer que dans chacun des deux cas on aboutit à une absurdité. On a donc prouvé : $A' \cap A'' = \emptyset$.

4.2. Montrer que l'ensemble des entiers compris, au sens large, entre 1 et a_{2n+1} s'écrit : $A'_n \cup A''_n$ avec : $A'_n = \{E(k\omega) \mid k \in \mathbb{N}^*, k \leqslant a_{2n}\}$

$$A''_n = \{E(k\omega^2) \mid k \in \mathbb{N}^*, k \leqslant a_{2n-1}\}$$

En déduire $A' \cup A'' = \mathbb{N}^*$.

4.3. Montrer que ω est le seul réel $\theta > 0$ tel que :

$$\left(\{E(p\theta) \mid p \in \mathbb{N}^*\}, \{E(q\theta^2) \mid q \in \mathbb{N}^*\}\right)$$

soit une partition de $\mathbb{N}^*$.
(On pourra commencer par montrer que, nécessairement, $\theta > 1$).

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail